Cálculo 3A – EP12 – Integral de superfície e aplicações – Gabarito

Exercício 1: Calcule $\iint_S \left(z - x^2 + xy^2 - 1\right) dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u,v) = u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}} + (u^2+1)\vec{\mathbf{k}}, \text{ com } 0 \le u \le 1 \text{ e } 0 \le v \le 2.$$

Solução: Temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u,\ 0,\ 1)$$

donde $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = \sqrt{1+4u^2}$.

Também:

$$dS = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv = \sqrt{1+4u^2}\, dudv\,.$$

Então:

$$\iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\, dS = \iint_D (u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1)\sqrt{1+4u^2}\, dudv =$$

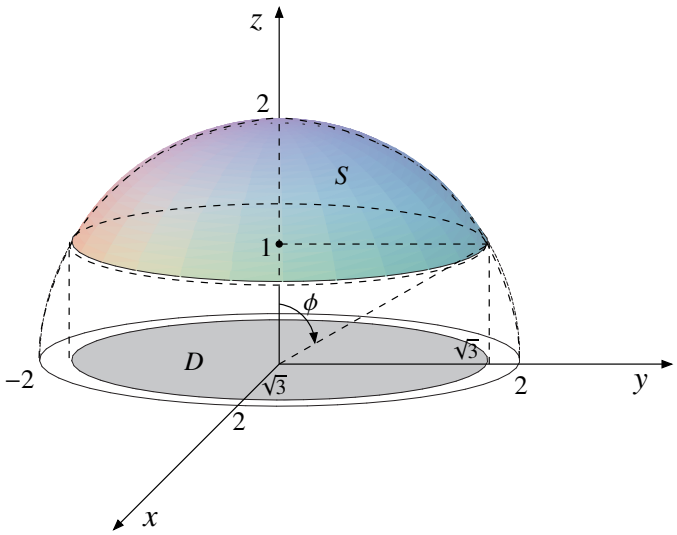
$$= \iint_D uv^2\sqrt{1+4u^2}\, dudv = \int_0^1 \int_0^2 u(1+4u^2)^{1/2}v^2\, dvdu =$$

$$= \int_0^1 u(1+4u^2)^{1/2}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 du = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 (1+4u^2)^{1/2}\, d(1+4u^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[(1+4u^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

Exercício 2: Calcule $\iint_S f(x,y,z)\, dS$, onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \ge 1$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Observe que $\operatorname{tg}\phi = \sqrt{3}/1$ implica $\phi = \pi/3$. Uma parametrização de S é dada por

$$\varphi(\phi,\theta) = (2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\phi) \text{ com } (\phi,\theta) \in D : 0 \le \phi \le \pi/3 \text{ e } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Sabemos que, no caso da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, o elemento diferencial de área da parametrização por coordenadas esféricas é $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Logo, $dS = 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Assim:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left(\varphi(\phi,\theta)\right) 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 4\iint_D \left(4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 16\iint_D \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta = 16\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\operatorname{sen}\phi\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= -32\pi\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)d(\cos\phi) = -32\pi\left[\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= -32\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{20\pi}{3}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\iint_S x^2 z\,dS$, onde S é o cilindro $x^2+y^2=a^2$, com $0\le z\le 1$.

Solução: Podemos parametrizar o cilindro usando as coordenadas cilíndricas com $r=a$. Então

$$S:\varphi(\theta,z)=(a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, z),\ \text{com}\ (\theta,z)\in D:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le z\le 1\end{cases}.$$

Calculemos $\|\varphi_\theta(\theta,z)\times\varphi_z(\theta,z)\|$:

$$\varphi_\theta(\theta,z) = (-a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta, 0)$$
$$\varphi_z(\theta,z) = (0,0,1)$$

donde

$$\varphi_\theta(\theta,z)\times\varphi_z(\theta,z) = \begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ -a\operatorname{sen}\theta & a\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, 0)\,.$$

Observe que o vetor normal em cada ponto do cilindro é paralelo ao plano xy e é a projeção normal de $\varphi(\theta,z)$ nesse plano.

Tem-se:

$$\|\varphi_\theta\times\varphi_z\| = a\,.$$

Logo,

$$dS = \|\varphi_\theta\times\varphi_z\|\,d\theta\,dz = a\,d\theta\,dz\,.$$

Então:

$$\iint_S x^2 z\,dS = \iint_D (a\cos\theta)^2 z\cdot a\;d\theta dz = a^3\iint_D z\cos^2\theta\;d\theta dz = a^3\int_0^1 z\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\;d\theta dz =$$

$$= a^3\cdot\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\int_0^1 z\,dz = \pi a^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi a^3}{2}\,.$$

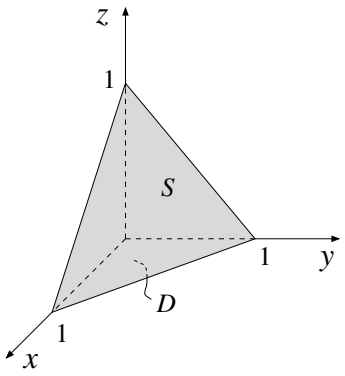
Obs.: outra maneira de parametrizar S:

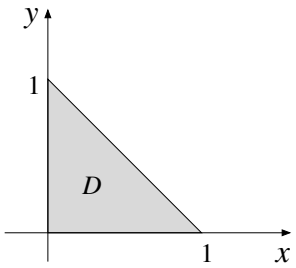
Se $(x,y,z)\in S$ então x e y satisfazem a equação $x^2+y^2=a^2$ e z é tal que $0\le z\le 1$. Parametrizando a

circunferência $x^2+y^2=a^2$, tem-se $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, com $0 \le t \le 2\pi$. Adotando t e z como parâmetros, tem-se $S : \varphi(t,z) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, z)$, com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S x\,dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Solução: A superfície S e a sua projeção sobre o plano xy estão ilustradas nas figuras que se seguem.





Definimos S por

$$S : z = 1 - x - y = f(x,y), \text{ onde } (x,y) \in D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}.$$

Temos que:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy.$$

Então:

$$\iint_S x\,dS = \iint_D x\sqrt{3}\,dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x\,dydx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Exercício 5: Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

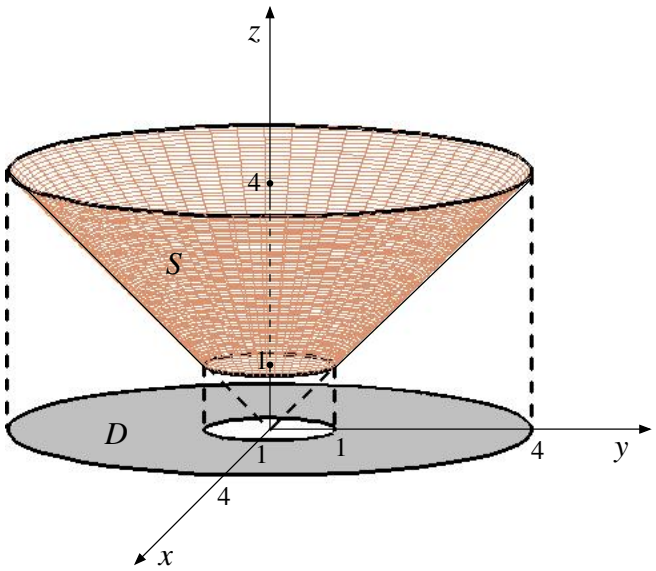
a) Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.

b) Parametrize S usando as coordenadas polares.

c) Calcule $\iint_S z^2\,dS$.

Solução:

a) Como S é o gráfico da função $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com $(x,y) \in D : 1 \le x^2+y^2 \le 16$, então, adotando x e y como parâmetros, temos $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y) \in D : 1 \le x^2+y^2 \le 16$.



O esboço de S está representado na figura acima.

b) Adotando r e θ como parâmetros, temos

$$S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r) \text{ onde } (r,\theta) \in D_{r\theta} : 1 \le r \le 4\,, 0 \le \theta \le 2\pi.$$

c) Consideremos a parametrização do item (a) para calcular a integral. Temos então que

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + \left(z_y\right)^2}\; dxdy$$

onde $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Então,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = \sqrt{1+1}\; dxdy = \sqrt{2}\; dxdy\,.$$

Assim:

$$\iint_S z^2\; dS = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\; dxdy = \sqrt{2}\iint_D \left(x^2+y^2\right)\; dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2\,. \end{cases}$$

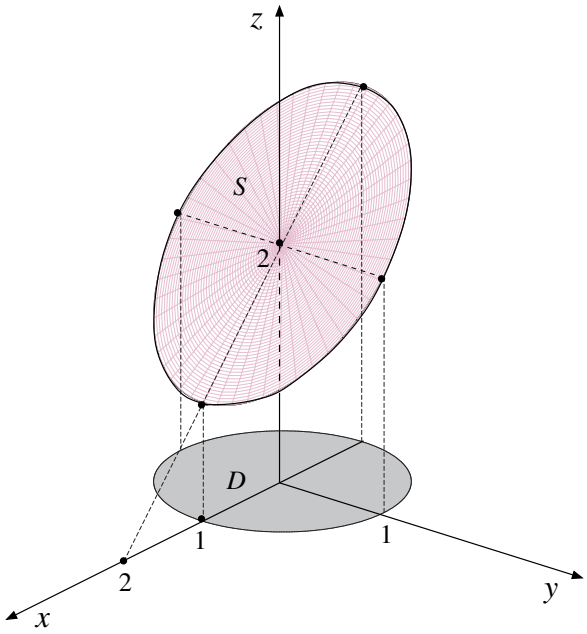
Transformando o conjunto D em coordenadas polares, temos $D_{r\theta} : 1 \le r \le 4\,, 0 \le \theta \le 2\pi$. Logo:

$$\iint_S z^2\; dS = \sqrt{2}\iint_{D_{r\theta}} r^2 r\; drd\theta = \sqrt{2}\int_1^4 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\int_1^4 r^3\; dr = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^4 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}(256-1) = \frac{255\sqrt{2}\pi}{2}\,.$$

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = y^2$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



A superfície S é descrita por $S : z = f(x,y) = 2 - x$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + \left(f_y\right)^2}\, dxdy$, então

$$dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\,.$$

Temos

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_D y^2\, \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint_D y^2\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos:

$$\iint_D y^2\, dxdy = \iint_{D_{r\theta}} (r^2 \operatorname{sen}^2\theta) r\, drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen}^2\theta\, drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \int_0^1 r^3\, drd\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Logo:

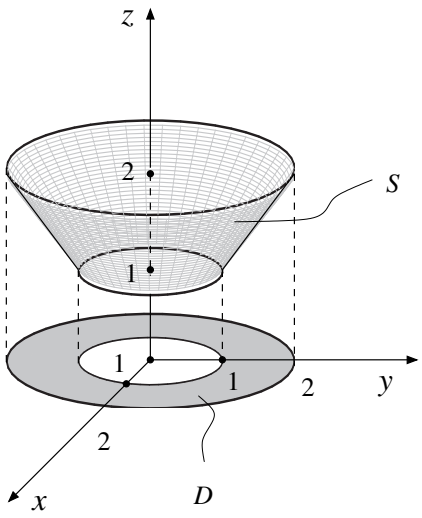
$$M = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} u.m.$$

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.

Note que o eixo de S é o eixo z. Então

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, dS$$



onde $\rho(x,y,z) = \rho$. Logo:

$$I_z = \rho \iint_S (x^2+y^2)\, dS\,.$$

A superfície S pode ser descrita por $S : z = \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : 1 \le x^2+y^2 \le 4$. Tem-se:

$$z_x = f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y = f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donde

$$1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2\,.$$

Como $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\; dxdy$ então $dS = \sqrt{2}\; dxdy$. Tem-se:

$$I_z = \rho \iint_S (x^2+y^2)\, dS = \rho \iint_D (x^2+y^2)\,\sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\rho \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2\,. \end{cases}$$

Então:

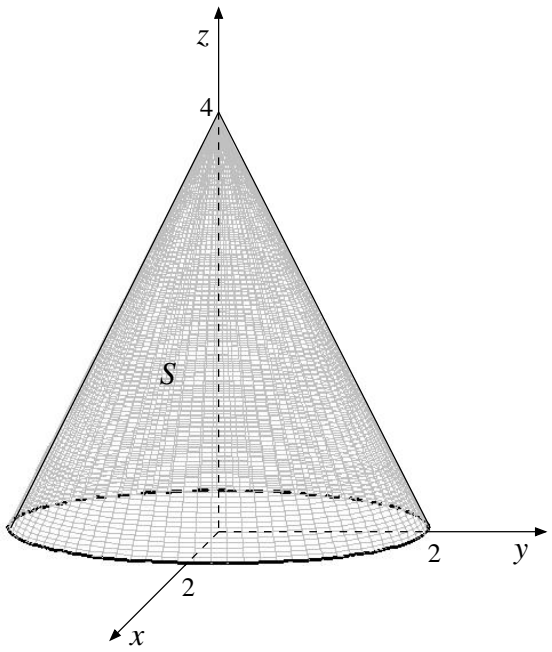
$$I_z = \sqrt{2}\,\rho \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\; drd\theta = \sqrt{2}\,\rho \iint_{D_{r\theta}} r^3\; drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\,\rho \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\sqrt{2}\,\rho\pi \int_1^2 r^3\, dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\rho\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}(16-1) = \frac{15\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}\,.$$

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ e limitado pelo plano xy. Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de S é dada por $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4$. Temos $z_x = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo:

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + \left(z_y\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{1+4}\, dxdy = \sqrt{5}\, dxdy\,.$$

Como a distância de (x,y,z) ao eixo z é igual a $\sqrt{x^2+y^2}$ então a densidade $\delta(x,y,z)$ é dada por $\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$ onde k é uma constante positiva. A massa M de S é dada por:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_S \delta(x,y,z)\, dS = k \iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \\
&= k \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{5}\, dxdy = \sqrt{5}k \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \\
&= \sqrt{5}k \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \cdot r\, d\theta dr = 2\sqrt{5}k\pi \int_0^2 r^2\, dr = \\
&= 2\sqrt{5}k\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}\ \ u.m.
\end{aligned}$$

O momento de inércia em relação ao eixo z é dado por:

$$I_z = \iint_S \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\ dS = k\iint_S \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\ dS =$$

$$= \sqrt{5}k\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\ dxdy = \sqrt{5}k\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r^2\right)^{3/2} r\ d\theta dr =$$

$$= 2\sqrt{5}k\pi\int_0^2 r^4\ dr = 2\sqrt{5}k\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64\sqrt{5}k\pi}{5} =$$

$$= \frac{12}{5}\cdot\frac{16\sqrt{5}k\pi}{3} = \frac{12}{5}M\,.$$